

高等数值分析大作业

注1: 提交截止日期: 2021年1月1日23:59分, 提交邮箱: num_ana_thu@163.com

注2: 提交文件(ZIP文件, 文件命名: 姓名1+姓名2-数值分析大作业, 例如: 张三+李四-数值分析大作业)应包括: (1) 作业报告 ((PDF格式, 文件命名: 姓名1+姓名2-作业报告.PDF); (2) 代码 (ZIP格式, 文件命名: 姓名1+姓名2-作业报告.ZIP)

注3: 精度指 $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty} \leq \epsilon$, 收敛情况包括每一步中 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$ 以及每一步的残差 $r^{(k-1)} = \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty}$, 收敛曲线是 r_k 关于 k 的曲线。

1 线性方程组求解

1. 考虑以下线性方程组:

$$\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 6, \\ -2x_1 - 12x_2 + 19x_3 = -7. \end{cases}$$

取初始值 $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ 并完成以下作业。

- (a) 编写Jacobi迭代法程序, 精度要求 $\epsilon = 10^{-5}$ 时的迭代次数及相应的收敛情况。
- (b) 编写Gauss-Seidel迭代法的程序, 精度要求 $\epsilon = 10^{-5}$ 时的迭代次数及相应的收敛情况。
- (c) 给出Jacobi方法与Gauss-Seidel方法迭代矩阵的谱半径及渐近收敛速度。
- (d) 取 $w = 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6$, 编写SOR迭代法程序, 精度要求 $\epsilon = 10^{-5}$ 时, 列出不同松弛因子下的迭代次数及相应的收敛情况。
- (e) 计算最优松弛因子 w_{opt} , 用SOR法求解, 并给出同样精度要求下的迭代次数与收敛情况。

2. 稀疏矩阵线性方程组求解。设矩阵 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 满足:

$$\begin{cases} a_{ii} = 3, & \text{if } i = 1, \dots, n, \\ a_{i,i-1} = -1, & \text{if } i = 2, \dots, n, \\ a_{i,i+1} = -1, & \text{if } i = 1, \dots, n-1, \\ a_{i,n+1-i} = \frac{1}{2}, & \text{if } i = 1, \dots, n \text{ 且 } i \neq \frac{n}{2}, i \neq \frac{n}{2} + 1, \\ a_{ij} = 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

取 $b = (2.5, 1.5, \dots, 1.5, 1.0, 1.0, 1.5, \dots, 1.5, 2.5)^\top$. 精度要求 $\epsilon = 10^{-6}$, 分别取 $n = 100$ 和 $n = 100,000$.

(a) 编写Jacobi迭代法程序, 计算求解方程组 $Ax = b$ 所需的CPU时间及相应的收敛曲线。

(b) 编写共轭梯度法的程序, 计算求解方程组 $Ax = b$ 所需的CPU时间及相应的收敛曲线。

3. 编写共轭梯度方法程序求解线性方程组

$$\begin{cases} 2.51x_1 + 1.48x_2 + 4.53x_3 = 0.05, \\ 1.48x_1 + 0.93x_2 + -1.30x_3 = 1.03, \\ 2.68x_1 + 3.04x_2 - 1.48x_3 = -0.53. \end{cases}$$

给出相应的收敛情况, 计算结果保留8位小数。