第一次作业参考答案

2020 年 10 月 22 日

第一章

13. 对于从属的矩阵范数 $\|\cdot\|$，有 $\|\boldsymbol{I}\|=1$ 且满足 $\|\boldsymbol{AB}\|\le\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{B}\|$, $\forall\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

(1) $1=\|\boldsymbol{I}\|\|=\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\|\le\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{A}\|\Rightarrow\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\ge\dfrac{1}{\|\boldsymbol{A}\|}$ ($\boldsymbol{A}$ 非奇异，则 $\|\boldsymbol{A}\|\neq 0$).

(2) $\|\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}\|=\|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AB}^{-1})\|=\|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}\|\le\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{B}^{-1}\|$.

17.

(1)

$$\|\boldsymbol{AQ}\|_2=\left[\rho\left((\boldsymbol{AQ})^\top(\boldsymbol{AQ})\right)\right]^{\frac12}=\left[\rho\left(\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{AQ}\right)\right]^{\frac12}=\left[\rho\left(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}\right)\right]^{\frac12}=\|\boldsymbol{A}\|_2,$$
$$\|\boldsymbol{QA}\|_2=\left[\rho\left((\boldsymbol{QA})^\top(\boldsymbol{QA})\right)\right]^{\frac12}=\left[\rho\left(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{QA}\right)\right]^{\frac12}=\left[\rho\left(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}\right)\right]^{\frac12}=\|\boldsymbol{A}\|_2.$$

注：也可利用 $\|\boldsymbol{Q}\|_2=1$ 或 $\|\boldsymbol{Qx}\|_2=\|\boldsymbol{x}\|_2$ 证明。

(2) 利用 $\|\boldsymbol{A}\|_F^2=\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}\right)$ 以及相似变换不改变特征值可得

$$\|\boldsymbol{AQ}\|_F^2=\mathrm{tr}\left((\boldsymbol{AQ})^\top(\boldsymbol{AQ})\right)=\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{AQ}\right)=\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}\right)=\|\boldsymbol{A}\|_F^2,$$

$$\|\boldsymbol{QA}\|_F^2=\mathrm{tr}\left((\boldsymbol{QA})^\top(\boldsymbol{QA})\right)=\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{QA}\right)=\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}\right)=\|\boldsymbol{A}\|_F^2.$$

21.

(1) $\boldsymbol{A}$ 奇异 $\Leftrightarrow\det(\boldsymbol{A})=0\Leftrightarrow 3a=2b$.

(2) $\boldsymbol{A}$ 严格对角占优 $\Leftrightarrow|a_{ii}|>\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{3}|a_{ij}|\ \ i=1,2,3\Rightarrow|a|>1,|b|<1$.

(3) $\boldsymbol{A}$ 对称 $\Rightarrow\ b=1$, $\boldsymbol{A}$ 正定 $\Leftrightarrow\Delta_i\ge 0\ i=1,2,3\Rightarrow a>0,a>\frac12,a>\frac23$, 故 $b=1,a>\frac23$.

第二章

4.

(1) 由于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 经过一步 Gauss 消去变换为 $\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}^{(2)}$，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{A}^{(2)}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，则 $\boldsymbol{PAP}^\top=\begin{bmatrix} a_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}$ 对称正定，从而 $\boldsymbol{A}_2$ 也对称正定。

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 严格对角占优，即 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$. 对于任意固定的 $i\in\{2,3,\ldots,n\}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2,j\neq i}^{n}|a_{ij}^{(2)}| &= \sum_{j=2,j\neq i}^{n}|a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}| \\
&\le \sum_{j=2,j\neq i}^{n}|a_{ij}|+\frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}\sum_{j=2,j\neq i}^{n}|a_{1j}| \\
&< |a_{ii}|-|a_{i1}|+\frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}(|a_{11}|-|a_{1i}|) \\
&= |a_{ii}|-\frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}|a_{1i}| \\
&\le |a_{ii}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1i}| \\
&= |a_{ii}^{(2)}|.
\end{aligned}$$

因此，$\boldsymbol{A}_2$ 严格对角占优得证。

12. 由于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LL}^\top$，$\boldsymbol{A}$ 对称正定，则 $\boldsymbol{L}$ 是非奇异的下三角矩阵。

因此存在正交阵 $\boldsymbol{\Omega}_1,\boldsymbol{\Omega}_2$ 使得 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{\Omega}_1\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Omega}_2$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathbf{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$，$\lambda_1^2\ge\ldots\ge\lambda_n^2$ 是 $\boldsymbol{L}^\top\boldsymbol{L}$ 的 n 个特征值。

从而，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LL}^\top=\boldsymbol{\Omega}_1\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Omega}_2\boldsymbol{\Omega}_2^\top\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Omega}_1^\top=\boldsymbol{\Omega}_1\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{\Omega}_1^\top$.

因此 $\rho(\boldsymbol{A})=\lambda_1^2=\rho(\boldsymbol{L}^\top\boldsymbol{L})$.

因此，$\|\boldsymbol{L}\|_2^2=\rho(\boldsymbol{L}^\top\boldsymbol{L})=\lambda_1^2=\rho(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_2$.

21. 要证对任意的奇异矩阵 $\boldsymbol{B}$，有

$$\frac{1}{\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})}\le\frac{\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|}{\|\boldsymbol{A}\|},$$

即证

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|} \leq \frac{\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|}{\|\boldsymbol{A}\|},$$

即证

$$\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \geq 1.$$

如若不然，$\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\| < 1$，则

$$\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\| = \|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\| \leq \|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\| < 1$$

由第一章定理 4.13 可知 $\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 非奇异，则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 非奇异，矛盾。因此，有

$$\frac{1}{\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})} \leq \frac{\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}.$$