第三次作业参考答案

2020 年 12 月 11 日

第五章

2.

记$M = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \lambda(A)\}$, $m = \min\{|\lambda| \mid \lambda \in \lambda(A)\}$，由Gerschgorin定理，有$\lambda(A) \subseteq [-0.7, 1.5] \cup [2, 8]$. 因此 $M \leq 8$.

令$B = \mathrm{diag}(1, 1/4, 1)$, 则

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 5.2 & 2.4 & 2.2 \\ 0.15 & 0.4 & 0.125 \\ 2.2 & 2.0 & 4.7 \end{pmatrix}$$

由Gerschgorin定理，有$\lambda(BAB^{-1}) \subseteq [0.125, 9.8]$. 因此 $m \geq 0.125$.

故$\mathrm{cond}(A)_2 = M/m \leq 64$.

11.

(1) 记题目中所给矩阵为A，令$v = (2\sqrt{2}-2, 2)^T / \left\|(2\sqrt{2}-2, 2)\right\|$,

$$H = I - 2vv^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

则$P = \mathrm{diag}(1, H)$是正交阵。且有：

$$PAP^T = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 记题目中所给矩阵为A，令 $v = (1,1,-1)^T/\sqrt{3}$，$H = I - 2vv^T$， $P = \mathrm{diag}(1, H)$. 则有：

$$PAP^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 36 & 27 & 0 & 0 \\ 27 & 38 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -8 \\ 0 & -5 & -8 & 17 \end{pmatrix}$$

记 $c = -4/\sqrt{41}, s = -5/\sqrt{41}$。并且令

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

那么有：

$$JPAP^TJ^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 36 & 27 & 0 & 0 \\ 27 & 38 & \sqrt{41} & 0 \\ 0 & \sqrt{41} & 89/41 & 432/41 \\ 0 & 0 & 432/41 & 567/41 \end{pmatrix}$$

16.

记 $c_1 = s_1 = 1/\sqrt{2}$, 令

$$J_1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_1 & 0 & c_1 \end{pmatrix}$$

则有：

$$J_1AJ_1^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

记 $c_2 = s_2 = 1/\sqrt{2}$，令

$$J_2 = \begin{pmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则有

$$J_2J_1A\left(J_2J_1\right)^T=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J=J_2J_1=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

因此A的特征值为$5,1,-1$，相应的特征向量分别为：$(1,\sqrt{2},1)^T,(-1,\sqrt{2},-1)^T,(-1,0,1)^T$