第二次作业参考答案

2020 年 11 月 16 日

第三章

2.

(1) 若$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$奇异，即存在$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$使得$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，则$\lambda=1$是$\boldsymbol{B}$的一个特征值，从而$\rho(\boldsymbol{B})\geq 1$，矛盾，因此$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$非奇异。下证$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{S}^{(k)}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}$.

由$\rho(\boldsymbol{B})<1$知，存在范数$\|\cdot\|$使得$\|\boldsymbol{B}\|<1$，则$\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{B}\|^{k+1}=0$.

由于

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{S}^{(k)}-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\| &\leq \|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\|\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{S}^{(k)}-\boldsymbol{I}\| \\ &= \|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\|\|\boldsymbol{B}^{k+1}\| \\ &\leq \|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\|\|\boldsymbol{B}\|^{k+1}\end{aligned}$$

因此$\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{S}^{(k)}-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\|=0$，则$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{S}^{(k)}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}$.

(2) 若$\{\boldsymbol{S}^{(k)}\}$收敛，则$\{\boldsymbol{S}^{(k)}\}$是柯西列，则对于$\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{S}^{(k)}-\boldsymbol{S}^{(k-1)}$有$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{0}$。由定理1.2知，$\rho(\boldsymbol{B})<1$.

11. 迭代式中$\boldsymbol{B}=\alpha\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$，计算$\boldsymbol{B}$的特征值得$\lambda_1=4\alpha+1,\lambda_2=\alpha+1$.

因此$\rho(\boldsymbol{B})=\max\{|4\alpha+1|,|\alpha+1|\}$.

由$\rho(\boldsymbol{B})<1$得$\alpha\in(-\dfrac{1}{2},0)$时，迭代收敛。

$\rho(\boldsymbol{B})$最小时，即$\alpha=-\dfrac{2}{5}$时，收敛最快。

16. 为证明JOR迭代法收敛，考虑去证$\rho(\boldsymbol{B}_\omega) < 1$.

假设存在$\lambda, \boldsymbol{x}$满足$|\lambda| \geq 1, \boldsymbol{B}_\omega \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$,

即 $[\omega \boldsymbol{B}_J + (1-\omega)\boldsymbol{I}]\, \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$,

即 $\boldsymbol{B}_J \boldsymbol{x} = \dfrac{1}{\omega}(\lambda + \omega - 1)\boldsymbol{x}$,

则$\dfrac{1}{\omega}(\lambda + \omega - 1)$是$\boldsymbol{B}_J$的特征值。

由于$|\lambda| \geq 1, 0 < \omega \leq 1$

因此$\rho(\boldsymbol{B}_J) \geq |\dfrac{\lambda + \omega - 1}{\omega}| = |1 + \dfrac{\lambda - 1}{\omega}| > 1$

矛盾于J迭代法收敛，因此JOR迭代法收敛得证。

或者：存在一个矩阵从属范数使得$\|\boldsymbol{B}_J\| < 1$

则$\|\boldsymbol{B}_\omega\| = \|\omega \boldsymbol{B}_J + (1-\omega)\boldsymbol{I}\| \leq \omega \|\boldsymbol{B}_J\| + 1 - \omega < 1$

21. $\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})$，其中$\boldsymbol{A}$对称正定。

求椭球面$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}^{(0)})$与直线$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(0)} + \alpha \boldsymbol{p}$的交点：

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}^{(0)}) \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(0)} + \alpha \boldsymbol{p} \end{cases}$$

即

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} + \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}^{(0)} + \alpha \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}^{(0)} + \alpha \boldsymbol{p}) = \varphi(\boldsymbol{x}^{(0)}),$$

整理得

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})\alpha^2 + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{p})\alpha = 0,$$

解得

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{2(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{p})}{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})},$$

因此直线l与椭球面$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}^{(0)})$交于两点

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}^{(0)} + \alpha_2 \boldsymbol{p}$$

下面求$\boldsymbol{x}^{(1)}$使得$\varphi(\boldsymbol{x}^{(1)}) = \min\limits_{\alpha} \varphi(\boldsymbol{x}^{(0)} + \alpha \boldsymbol{p})$.

记

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \varphi(\boldsymbol{x}^{(0)} + \alpha \boldsymbol{p}) \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} + \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}^{(0)} + \alpha \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}^{(0)} + \alpha \boldsymbol{p}) \\ &= \varphi(\boldsymbol{x}^{(0)}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})\alpha^2 + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{p})\alpha, \end{aligned}$$

由$\nabla f(\alpha)=0$得

$$\alpha=\frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{p})}{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})},$$

因此$\boldsymbol{x}^{(1)}=\boldsymbol{x}^{(0)}+\frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{p})}{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})}\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2}{2}$,即$\boldsymbol{x}^{(1)}$是这两交点连线中点。

第四章

4.5

令$\varphi(x)=x-\lambda f(x)$,则有：

$$\varphi'(x)=1-\lambda f'(x),\varphi(x^*)=x^*$$

其中$\lambda\in\left(0,\frac{2}{M}\right)$，$f'(x)\in(m,M)\Rightarrow 1-\lambda M\leq\varphi'(x)\leq 1-\lambda m$
令$L=\max\{|1-\lambda M|,|1-\lambda m|\}$,则$\forall x\in\mathbb{R}$,有 $|\varphi'(x)|\leq L\in(0,1)$. 从而

$$|x_{k+1}-x^*|=|\varphi\left(x_k\right)-x^*|=|\varphi\left(x_k\right)-\varphi\left(x^*\right)|\leq L\cdot|x_k-x^*|\leq L^k\cdot|x_0-x^*|$$

两边同取极限

$$\lim_{k\to\infty}|x_{k+1}-x*|\leq\lim_{k\to\infty}\left(L^k\cdot|x_0-x*|\right)=0$$

即得证:对任意的 $x_0\in R$ 及 $\lambda\in\left(0,\frac{2}{M}\right)$,序列 $\{x_k\}$均收敛到 x^*,

4.15

对ϕ关于x求一阶导和二阶导有：

$$\begin{aligned}\varphi'(x)=&1-r_1'(x)f(x)-r_1(x)f'(x)-r_2'(x)f^2(x)-2r_2(x)f(x)f'(x)\\ \varphi''(x)=&-r_1''(x)f(x)-2-r_1'(x)f'(x)-r_1'(x)f''(x)-r_2''(x)f^2(x)\\ &=-4r_2'(x)f(x)f'(x)-2r_2(x)\left(f'(x)\right)^2-2r_2(x)f(x)f''(x)\end{aligned}$$

由条件$f\left(x^*\right)=0$, 可化简为：

$$\begin{gathered}\varphi'\left(x^*\right)=1-f'\left(x^*\right)r_1\left(x^*\right)\\ \varphi''\left(x^*\right)=-2r_1'\left(x^*\right)f'\left(x^*\right)-r_1\left(x^*\right)f''\left(x^*\right)-2r_2\left(x^*\right)\left(f''(x)\right)^2\end{gathered}$$

要求至少三阶收敛，则需要满足 $\varphi'\left(x^*\right)=\varphi''\left(x^*\right)=0$,
即可反解出 $r_1(x)=1/f'(x)$ 以及$r_2(x)=f''(x)/\left(2\left(f'(x)\right)^3\right)$

4.22

对于给定向量p,有正交分解$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}p \oplus (\mathbb{R}p)^\perp$.即任取 $u \in \mathbb{R}^n$, 存在$\alpha \in \mathbb{R}, v \in (\mathbb{R}p)^\perp$使得 $u = \alpha p + v$.

则有

$$\bar{A}u - A_0 u = \alpha\left(q - A_0 p\right) = \alpha\left(A - A_0\right)p$$

由从属的矩阵范数的相容性，有：

$$\left\|\left(\bar{A} - A_0\right)u\right\|_2 \leq \|A - A_0\|_2 \|\alpha p\|_2 \leq \|A - A_0\|_2 \|u\|_2.$$

即$\frac{\left\|\left(\bar{A} - A_0\right)u\right\|_2}{\|u\|_2} \leq \|A - A_0\|_2$. 两边同时取上确界即可得证：$\left\|\bar{A} - A_0\right\|_2 \leq \|A - A_0\|_2$.