三维欧氏与四维闵氏空间

§0.1 欧氏空间回顾

以下主要介绍三维欧氏空间.其它维数的空间只是维数不同而已.

欧氏空间中的任何一点用**向量**(也称**矢量 vector**)来描述.

向量的几何定义与代数定义

几何定义：有一定长度的有向线段

代数定义：n 维有序实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

数组中的每一个数都称为**分量(component)**.只有一个分量，则称为标量.标量是向量的一个特殊情况.

向量由分量组成，反之，向量分解为分量，

三维空间中，任何向量可以展开成任何三个非共面向量的线性组合：

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{V}_1 + \beta \boldsymbol{V}_2 + \gamma \boldsymbol{V}_3$$

这样的分解不是唯一的.

向量的运算

标量积(scalar product)—由两个向量构造一个标量的运算规则.

几何定义： $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}| \cos\theta$

其中θ是这两个有向线段之间的夹角(三维和二维空间).

代数定义： $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \left(\sum_i x_i \boldsymbol{e}_i\right) \cdot \left(\sum_j y_j \boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \sum_{i,j} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_i x_i y_i$

其中，点表示标量积，不能省略.标量积也称为向量的**点积**或**点乘(dot product)**.其中采用了直角坐标系.

如果标量积为零，则称这两个向量**正交**.从几何定义知，此时(三维和二维空间) 这两个有向线段之间的夹角为直角.

向量的转动

坐标系的转动: 正交变换

考虑两组笛卡儿基 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ 和 $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3')$，考虑将其中一组基(basis)用另一组基表示.

$$\boldsymbol{e}_i' = \sum_j a_{ji} \boldsymbol{e}_j, \quad (i = 1, 2, 3)$$

由此可以得到变换矩阵

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

例，若有一个向量 $\boldsymbol{B}$，在一组基$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$下的分量是$(b_1,b_2,b_3)$，在变换之后的基组$(\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3')$下的坐标分量为$(b_1',b_2',b_3')$，且将此时的向量记为$\boldsymbol{B}'$.那么，有

$$\boldsymbol{B}' = \sum_i b_i'\boldsymbol{e}_i' = \sum_i b_i'\sum_j a_{ji}\boldsymbol{e}_j = \sum_j\sum_i a_{ji}b_i'\boldsymbol{e}_j = \sum_j b_j\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{B}$$

得到基组变换前后两组分量之间的关系为

$$b_j = \sum_i a_{ji}b_i'$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{pmatrix}$$

例，若一个向量 $\boldsymbol{C}$，经过线性变换 $\boldsymbol{R}$ 变换为 $\boldsymbol{C}'$.

$$\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{C} \qquad c_i' = \sum_j r_{ij}c_j$$

那么，这前后两个向量在(固定的)基组上的分量的关系如下.

$$\boldsymbol{C} = \sum_j c_j\boldsymbol{e}_j, \quad \boldsymbol{C}' = \sum_i c_i'\boldsymbol{e}_i = \sum_{ij} a_{ij}c_j\boldsymbol{e}_i$$

写成列向量的形式，

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C}' = \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix},$$

矢量的变换就是

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

因此，

$$c_j' = \sum_i a_{ji}\ c_i$$

体会一下以上两例的区别.

设基组中的分量之间是**正交**的(orthogonal)，即有

$$\boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j' = \delta_{ij}$$

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

由此得到矩阵元之间的关系

$$\delta_{ij}=\boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}'_j=\sum_k a_{ki}\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}'_j=\sum_k a_{ki}(\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}'_j)=\sum_k a_{ki}a_{kj}$$

$$\delta_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\sum_k a_{ik}\boldsymbol{e}'_k\cdot\boldsymbol{e}_j=\sum_k a_{ik}a_{jk}$$

上两式称为正交性关系.此时变换矩阵 R 是幺正的，其相应的变换称为正交变换.在 n 维空间中，旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 具有 n^2 个矩阵元.由于是幺正矩阵，则由列(行)向量间的正交性关系提供 $(n^2-n)/2$ 个条件，可由列(行)向量间归一化提供 n 个条件，共有 $(n^2+n)/2$ 个等式.于是，在矩阵元中有 $n^2-(n^2+n)/2=(n^2-n)/2$ 个是不确定的.

在二维空间中，留下一个自由参数，可取为旋转角.

在三维空间中，有三个自由度，对应于用来描写刚体取向的三个欧拉角.

例，三维旋转矩阵.

首先绕 X_3 轴逆时针旋转 φ 弧度，得到新的基 $(\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3)$，得到旋转矩阵为

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

然后绕 X'_2 轴逆时针旋转 θ 弧度，得到基 $(\boldsymbol{e}''_1,\boldsymbol{e}''_2,\boldsymbol{e}''_3)$.这步旋转操作的矩阵为

$$\boldsymbol{R}_2=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$$

则两次旋转的总的旋转矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\end{pmatrix}$$

定理 标量积在正交变换下不变

证明 将变换前后的矢量都投影在正交规一基组上。

$$\boldsymbol{X}'\cdot\boldsymbol{Y}'=\sum_i x'_i y'_i=\sum_{i,k,l}a_{ik}a_{il}x_k y_l=\sum_{k,l}\delta_{kl}x_k y_l=\sum_k x_k y_k=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}$$

证明完毕.证明过程中利用了正交性关系.

向量积(vector product)—由两个向量构造一个向量的运算规则.

几何定义：$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ 的大小是 $|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|\sin\theta$，方向垂直于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 构成的平面.

其中 θ 是这两个有向线段之间的夹角(三维和二维空间).

代数定义：$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=\sum_{j,k}x_j\boldsymbol{e}_j\times y_k\boldsymbol{e}_k=\sum_{j,k}x_j y_k\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k=\sum_{j,k}x_j y_k\varepsilon_{jki}\boldsymbol{e}_i=\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}x_j y_k\boldsymbol{e}_i$

其中，叉表示向量积，不能省略.向量积也称为向量的**叉积**或**叉乘(cross product)**.

行列式表示：$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}x_j y_k\boldsymbol{e}_i$

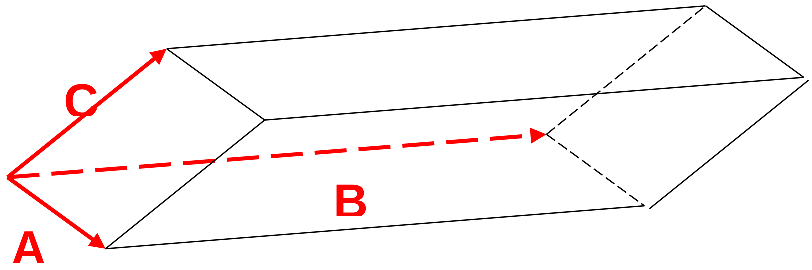
此处省略了求和符号，这表示使用爱因斯坦求和规则.

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & (1,2,3)\text{的偶排列}\\ -1 & (1,2,3)\text{的奇排列}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

由向量积的几何定义可知，两个向量叉积的大小表示这两向量组成的平行四边形的面积.显然，两个分量平行时，向量积为零.在 n 维空间中，两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 平行是指，一个向量恰好是另一个向量的倍数：$\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{y}$.此时，称这两个向量线性相关.

向量线性相关(linear independence)的定义：一个向量可以用另外 m 个向量来表示，则称这 $m+1$ 个向量线性相关.

三维空间中行列式的几何意义



向量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 确定的平行六面体的体积为：

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k=\det\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{pmatrix}$$

一个线性变换 T 可以将直角坐标线变换成斜坐标系.这样的线性变换就把单位立方体变成体积为 $\det T$ 的平行六面体.线性变换的行列式给出了最后体积与原始立方体的体积之比.行列式是测定体积变化的尺度因子.

行列式的几何意义(n 维空间)

在 n 维空间中，由 n 个线性无关向量确定的区域的“体积”为：由这 n 个向量组成的行列式的值(的绝对值).

如果 n 个向量线性相关，(例如：在三维空间中的三个共面向量)，则其行列式的值为零，即由这 n 个线性相关的向量确定的区域在 n 维空间中的“体积”为零(二维平面在三维空间中的体积为零).

向量积在空间反演下的变换：

极向量(polar vector)，在空间反演下变号：$\boldsymbol{r}\Rightarrow\boldsymbol{r}'=-\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{p}\Rightarrow\boldsymbol{p}'=-\boldsymbol{p}$

轴向量(axial vector)，两个极向量的向量积，在空间反演下不变号：$\boldsymbol{L}\Rightarrow\boldsymbol{L}'=(-\boldsymbol{r})\times(-\boldsymbol{p})=\boldsymbol{L}$

物理学中运用向量的一个经典的例子—行星轨道理论的向量分析

为了说明向量方法的功能和应用，我们用向量分析来解决开普勒轨道问题.(不是牛顿采用的原始方法.牛顿的原始方法可以称为几何法.) **无论一开始用什么方法，都必须用到微积分才能解决行星运动问题的.**

我们首先证明开普勒第二定律：在有心力场中角动量为一常量.即

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$$

是一个常量.将此角动量对时间微分,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$$

由于 $\boldsymbol{p}=m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}$，所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}$ 的第一项为零.代入 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{F}$，得到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}$ 的表达式为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$.在有心力场中，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 同向，得到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}=0$ 即角动量为恒定量.这意味着，位矢 $\boldsymbol{r}$ 以及整个轨道都处在三维空间内的固定平面上.这一结果本质上就是开普勒第二定律，并往往用面积速度守恒来表述.(开普勒三定律.开普勒是如何确定太阳与行星之间的距离的呢？)

下面讨论具体的有心场，万有引力场.

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{k}{r^2}\boldsymbol{n}$$

这里的 $\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{r}$ 方向上的单位向量，k 为常数.左边为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{n})=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n}+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t}$$

角动量

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=r\boldsymbol{n}\times m\boldsymbol{v}=mr\boldsymbol{n}\times(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n}+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t})=mr^2\boldsymbol{n}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n}$$

再考虑

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{L}=-\frac{k}{mr^2}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{L}=-\frac{k}{mr^2}\boldsymbol{n}\times(mr^2\boldsymbol{n}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t})$$
$$=-k[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t})-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}]=k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n}$$

上式中利用了 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1$，因而 $\boldsymbol{n}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t}=0$.对 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L})=k\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t}$ 积分得到 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L}=k\boldsymbol{n}+\boldsymbol{C}$

其中 $\boldsymbol{C}$ 为一常数向量，在我们完成运动轨道的推导之后将看出，它沿轨道的长轴.

注意：一开始就用到了微分，此处又用到积分.行星运动的问题只有微积分出现之后才能解决.

利用角动量守恒，下面来计算运动的轨道.先计算角动量的平方.

$$L^2=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{L}=m\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L})=mr\boldsymbol{n}\cdot(k\boldsymbol{n}+\boldsymbol{C})=mr(k+C\cos\theta)$$

θ 为 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 间的夹角.解出轨道方程为

$$r=\frac{L^2/km}{1+C\cos\theta/k}=\frac{A}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

这个方程是圆锥截线的极坐标形式，ε表示圆锥截线的偏心率(eccentricity).

$$\varepsilon=\frac{|\boldsymbol{C}|}{k}=\frac{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L}-k\boldsymbol{n}|}{k}=\frac{[(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L})^2+k^2-2k\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L})]^{1/2}}{k}$$

$$=\frac{(v^2L^2+k^2-2kL^2/mr)^{1/2}}{k}=[1+\frac{(mv^2/2-k/r)2L^2}{mk^2}]^{1/2}=(1+\frac{2EL^2}{mk^2})^{1/2}$$

E 是系统的恒定能量.偏心率要由能量和角动量来确定.

习题

刚体中的欧拉角有三个角度变量，写出分别绕着三个角度旋转后的旋转矩阵.

§0.2 场论

场的概念

“场”是从大量实际现象中抽象出来的一个物理概念.重物周围空间的每一点都存在引力，电荷周围各点具有一定的电位，气流在空间中每一点上都有确定的速度，受热物体的内部形成一定的温度分布，这种例子举不胜举.我们把**一个物理量在空间中的分布，称为该物理量的场**.如重物的引力场，电荷的电位场，气流的速度场，物体的温度场，等等.按照物理量是数量还是向量，场也分成**数量场(scalar field)**和**向量场(vector field)**.温度场，电位场是数量场，速度场和引力场则是向量场.

从数学的角度来看，**一个场就是定义在空间(或它的某个区域)中的一个点函数**.如果对于空间区域V中的每一点M，都有数量u的一个确定值与之对应， 那末在V中确定了一个数量点函数：$u=u(M)$.它表示一个数量场.同样，在空间V中确定的向量点函数$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(M)$，描述一个向量场.

如果构成一个场的物理量不仅依赖于空间，并且依赖于时间，随着时间而变化，那末这个场将用一个关于点M和时间t的函数来表示$u=u(M,t)$或$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(M,t)$.这样的场叫做**不定常的场**.而不随时间变化的场$u(M)$或$\boldsymbol{v}(M)$，叫做**定常的场(稳定场 stable field)**.应当指出，绝对定常的场是不存在的，一切客观存在的物理现象都会随着时间的推移而变化.不过，如果一个场在不太长的时向内变化很微小，那就可以相对地看成是定常的场.

当在空间中引进了直角坐标系之后，点M可用它的坐标(x,y,z)表示，并把场表成$u(x,y,z)$和$\boldsymbol{v}(x,y,z)$的形式.所以**一个场也就是关于点的坐标的多变量函数**.注意：选取不同坐标系，可能会改变一个场的数学表达式，但不会改变场的物理性质.

“场论”一词是借用物理学的术语.本节讲的场论，是介绍一套研究场的数学方法，主要是对于标量场和向量场的微积分运算.它是多变量函数微积分学的一个组成部分.

0.2.1 三维空间的正交曲线坐标系

直角坐标系是坐标系的一种特殊形式.最一般的是曲线坐标系.

线元的定义：$ds_i=h_i dq_i \quad (i=1,\ 2,\ 3)$

空间中线元平方的定义：$ds^2=h_1^2dq_1^2+h_2^2dq_2^2+h_3^2dq_3^2$

体积元的定义：$dV=ds_1ds_2ds_3=h_1h_2h_3dq_1dq_2dq_3$

其中 h_i 是第 i 维坐标的权重系数，这个权重可能随空间而变化.

直角坐标、柱坐标、球坐标和抛物线坐标

坐标系 Coordinate system	直角 Cartesian	柱坐标 Cylindrical	球坐标 Spherical	抛物线 Parabolic
q_1	x	r	r	ξ
q_2	y	θ	θ	η
q_3	z	z	φ	φ
h_1	1	1	1	$\sqrt{\xi^2+\eta^2}$
h_2	1	r	r	$\sqrt{\xi^2+\eta^2}$
h_3	1	1	$r\sin\theta$	$\xi\eta$

0.2.2 标量场和向量场的微分运算

标量场的梯度(gradient)：对于标量场的微分得到的一个向量.

定义式：每一个分量的定义为

$$(\mathrm{grad}\varphi)_i=\lim_{ds_i\to 0}\frac{\varphi(q_i+\mathrm{d}q_i)-\varphi(q_i)}{\mathrm{d}s_i}=\frac{1}{h_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}=\frac{1}{h_i}\partial_i\varphi$$

整个向量为

$$\mathrm{grad}\varphi=\nabla\varphi=\sum_i\frac{1}{h_i}(\partial_i\varphi)\boldsymbol{e}_i$$

几何含义：标量场φ中某点的 gradφ的方向为该点处φ改变率最大的方向， gradφ 的方向垂直于等值线(面)；gradφ的大小等于在这个方向上的改变率，即

$$\left|\mathrm{grad}\varphi\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right|$$

向量场的散度(divergence)：对于向量场的微分得到的一个标量.

不依赖坐标系的定义式： $\mathrm{div}\boldsymbol{V}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_\sigma\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$

上式中通过位于 $q_1=a_1$ 和 $q_1=a_1+\delta q_1$ 的两个面元的积分之差：

$$\int_{a_2}^{a_2+\delta q_2}\mathrm{d}q_2\int_{a_3}^{a_3+\delta q_3}\mathrm{d}q_3 h_2(a_1+\delta q_1,q_2,q_3)h_3(a_1+\delta q_1,q_2,q_3)V_1(a_1+\delta q_1,q_2,q_3)$$
$$-\int_{a_2}^{a_2+\delta q_2}\mathrm{d}q_2\int_{a_3}^{a_3+\delta q_3}\mathrm{d}q_3 h_2(a_1,q_2,q_3)h_3(a_1,q_2,q_3)V_1(a_1,q_2,q_3)$$
$$=[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1h_2h_3)]_{q_i=a_i}\delta q_1\delta q_2\delta q_3$$

另外：体积元$\mathrm{d}\tau=h_1h_2h_3\delta q_1\delta q_2\delta q_3$.于是可以得到：

$$\mathrm{div}\,\mathbf{V}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_2h_3V_1)}{\partial q_1}+\frac{\partial(h_3h_1V_2)}{\partial q_2}+\frac{\partial(h_1h_2V_3)}{\partial q_3}\right]$$

向量场的散度的意义：表示向量场单位体积的“源强”

高斯定理：$\int_\tau \mathrm{div}\boldsymbol{V}\mathrm{d}\tau=\int_\sigma \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$　　看它与散度的定义式的关系

连续性方程：$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{V})=0$

设有静止体积为τ，表面为σ，流速为 $\boldsymbol{v}$，密度为ρ的流体，τ中流体的质量随时间变化率为：$\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho\mathrm{d}\tau=-\int_\sigma \rho\mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$，为单位时间内离开$\tau$的流体质量。

又由高斯定理：$\int_\tau \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{V})\mathrm{d}\tau=\int_\sigma \rho\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$.

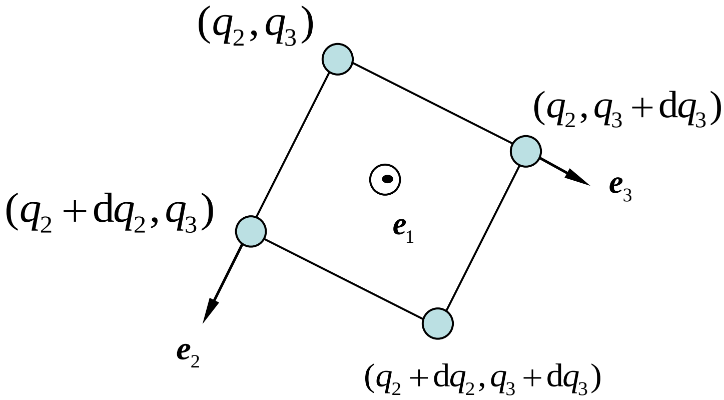
于是由质量守恒有：$\int_\tau[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{V})]\mathrm{d}\tau=0$.从而得到连续性方程.

向量场的旋度(curl)：对于向量场的微分得到的一个向量.

不依赖坐标系的定义式：$(\mathrm{curl}\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{n}=\lim_{\Delta\to\sigma}\frac{1}{\Delta\sigma}\oint_\lambda \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$

计算 $\boldsymbol{V}$ 沿面元$\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3$边界一圈的积分：

$$(\mathrm{curl}\,\mathbf{V})_1=\lim_{d\sigma\to 0}\frac{1}{\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3}\left[(V_2\mathrm{d}s_2)_{q_3}+(V_3\mathrm{d}s_3)_{q_2+dq_2}-(V_2\mathrm{d}s_2)_{q_3+dq_3}-(V_3\mathrm{d}s_3)_{q_2}\right]$$
$$=\lim_{\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3\to 0}\left[\frac{(V_3\mathrm{d}s_3)_{q_2+dq_2}-(V_3\mathrm{d}s_3)_{q_2}}{\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3}-\frac{(V_2\mathrm{d}s_2)_{q_3+dq_3}-(V_2\mathrm{d}s_2)_{q_3}}{\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3}\right]$$
$$=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_3V_3)}{\partial q_2}-\frac{\partial(h_2V_2)}{\partial q_3}\right]$$



以上是一个分量的定义式.整个向量的计算如下.

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{V}=\nabla\times\boldsymbol{V}=\frac{1}{h_2h_3}\left[\partial_2(h_3V_3)-\partial_3(h_2V_2)\right]\boldsymbol{e}_1$$

$$+\frac{1}{h_3h_1}\left[\partial_3(h_1V_1)-\partial_1(h_3V_3)\right]\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{h_1h_2}\left[\partial_1(h_2V_2)-\partial_2(h_1V_1)\right]\boldsymbol{e}_3$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ h_1V_1 & h_2V_2 & h_3V_3 \end{vmatrix}$$

最后写成了行列式的形式.

特例，直角坐标：

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{V}=\nabla\times\boldsymbol{V}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

高阶空间中也都可以定义向量场的散度和旋度.

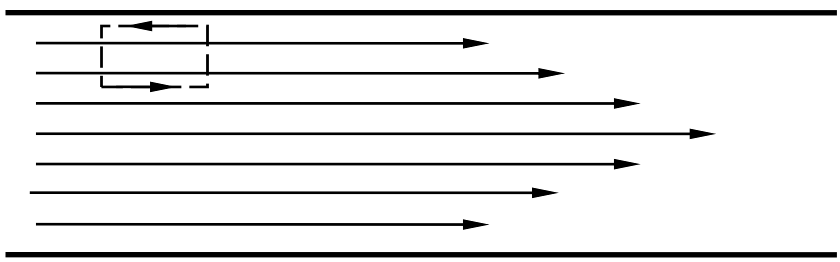
例 1 一桶以等角速度ω绕中心垂直轴 $\boldsymbol{k}$ 转动的水，v=$\omega r\theta$.

$$\boldsymbol{k}\cdot\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{1}{\Delta\sigma}\oint_\lambda \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{\lambda}=\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\oint_\lambda \omega r\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}\mathrm{d}\lambda$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{\omega r}{\pi r^2}\oint_\lambda \mathrm{d}\lambda=\lim_{r\to 0}\frac{\omega r}{\pi r^2}(2\pi r)=2\omega$$

例 2 曲线流动并不一定有旋度

例 3 直线流动并不一定没有旋度：



算符∇(Nabla operator)既有微分性质，又有矢量性质
微分性质：不可将∇与被作用函数随便调换位置
矢量性质：可以将∇看作一个矢量，因它有方向性.例如

梯度的旋度为零$\nabla\times(\nabla\varphi)=0$，因为两个平行矢量的叉乘为零.

旋度的散度为零$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$，因为两个相互垂直的矢量的点乘为零.

这个矢量本身在什么方向预先并不知道.

拉普拉斯算符Δ
在正交曲线坐标系中，定义：

$$\Delta\varphi=\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi)=\nabla\cdot(\nabla\varphi)=\nabla^2\varphi$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\partial_1(\frac{h_2h_3}{h_1}\partial_1\varphi)+\partial_2(\frac{h_3h_1}{h_2}\partial_2\varphi)+\partial_3(\frac{h_1h_2}{h_3}\partial_3\varphi)\right]$$

最后一个等式可由梯度和散度的定义得到.
拉普拉斯算符经常在微分方程中出现.常见的有以下一些方程.

拉普拉斯方程：$\nabla^2\varphi=0$

泊松方程：$\nabla^2\varphi=\rho(\boldsymbol{x})$

热传导(扩散)方程：$\nabla^2\varphi=K\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$

波动方程：$\nabla^2\varphi=\dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$

亥姆霍兹方程：$\nabla^2\varphi+k^2\varphi=0$

矢量场的拉普拉斯算符：作用在每一个分量上.
在直角坐标下：$\nabla^2\boldsymbol{V}=\sum_i\nabla^2V_i\boldsymbol{e}_i$

习题

在直角坐标、柱坐标、球坐标和抛物线坐标系中，分别写出梯度、散度和旋度的表达式.

证明：点电荷的静电场中，除原点以外，处处散度为零，旋度也为零.

在直角坐标系中，证明以下公式

$$\nabla(u_1u_2)=u_1\nabla u_2+u_2\nabla u_1$$

$$\nabla\cdot(u\boldsymbol{v})=u(\nabla\cdot\boldsymbol{v})+(\nabla u)\cdot\boldsymbol{v}$$

$$\nabla\times(u\boldsymbol{v})=u(\nabla\times\boldsymbol{v})+(\nabla u)\times\boldsymbol{v}$$

$$\nabla(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}_2\times(\nabla\times\boldsymbol{v}_1)+\boldsymbol{v}_1\times(\nabla\times\boldsymbol{v}_2)+(\boldsymbol{v}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_1+(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_2$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}_2\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v}_1)-\boldsymbol{v}_1\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v}_2)$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}_1(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_2)-\boldsymbol{v}_2(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1)+(\boldsymbol{v}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_1-(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_2$$

$$\nabla^2\boldsymbol{V}=-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{V})+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V})$$

§0.3 闵氏空间

张量(tensor)

设在三维空间的坐标的正交变换下，有3^N个量$T_{i_1 i_2\cdots i_N}$(此处每个指标由 1 变到 3)按照以下法则变换:

$$T'_{i_1 i_2\cdots i_N}=a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_N j_N}T_{j_1 j_2\cdots j_N}$$

则 T 称为三维空间中的 N 秩张量.很明显，一秩张量就是向量，零秩张量就是标量，其它最有用的情况是二秩张量，它有九个分量，服从下面的变换定律：

$$T'_{kl}=a_{ki}a_{lj}T_{ij}$$

以上利用了爱因斯坦求和规则.

例 1，转动惯量(moment of inertia)张量

设一个具有连续质量分布密度ρ的刚体，绕体内一固定点转动.

$$\boldsymbol{L}=\int(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\rho\mathrm{d}\tau=\int[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})]\rho\mathrm{d}\tau=\int[\boldsymbol{\omega}r^2-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})]\rho\mathrm{d}\tau$$

定义惯性张量I_{ij}

$$I_{ij}=\int[r^2\delta_{ij}-r_i r_j]\rho\mathrm{d}\tau$$

利用惯性张量可以表示总角动量

$$I_{ij}\omega_j=\int[r^2\delta_{ij}\omega_j-r_i r_j\omega_j]\rho\mathrm{d}\tau=\int[r^2\omega_i-r_i(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})]\rho\mathrm{d}\tau=L_i$$

例 2，电极化张量

$$P_i=\varepsilon_0\chi_{ij}E_j$$

其中的系数χ_{ij}是极化率张量.

在各向异性晶体中，介电系数，磁导率，电导率等都可能是二阶张量.

例 3，多极矩(multipole moment)张量

在空间某一区域τ内的电荷分布产生势

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\tau'$$

计算离源远处的场，$r'<r$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{r}\sum\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)$$

$P_l(\cos\theta)$是勒让德多项式(这一展开式见第三章的(3.4.27)式).得到势的展开式

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{q}{r}+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{P}}{r^3}+\frac{x_i x_j}{2r^5}Q_{ij}+\cdots$$

其中：$q=\int\rho\mathrm{d}\tau'$，这是单极(电荷)(unipolar moment)，标量

$\boldsymbol{P}=\int\boldsymbol{r}'\rho\mathrm{d}\tau'$，这是偶极矩(dipole moment)，向量

$Q_{ij}=\int(3x_i'x_j'-\delta_{ij}r'^2)\rho\mathrm{d}\tau'$，这是四极矩(quadrupole moment)，二阶张量

δ函数：表示集中于一个几何点的一个点质量或者点电荷。

δ函数的一次求导相当于电偶极子.证明方式如下.

一个电偶极子，就是在$\boldsymbol{l}/2$和$-\boldsymbol{l}/2$的位置，分别放上 q 和$-q$ 的点电荷.因此偶极子的电荷密度为

$$\rho(\boldsymbol{r})=q\delta(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}/2)-q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}/2)$$

当观察点 $\boldsymbol{r}$ 的距离远大于偶极子的尺度时，可以做泰勒展开至二级项：

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{r})&=q[\delta(\boldsymbol{r})+\frac{\boldsymbol{l}}{2}\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{r})+\frac{1}{2!}(\frac{\boldsymbol{l}}{2})^2\nabla^2\delta(\boldsymbol{r})]-q[\delta(\boldsymbol{r})-\frac{\boldsymbol{l}}{2}\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{r})+\frac{1}{2!}(\frac{\boldsymbol{l}}{2})^2\nabla^2\delta(\boldsymbol{r})]\\&=q\boldsymbol{l}\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{p}\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$ 就是点偶极子的定义.

现在考虑，电偶极子可能是随时间变化的.这既可以是位矢$\boldsymbol{l}(t)=\boldsymbol{l}_0e^{i\omega t}$，也可能是电荷随时间变化$q(t)=q_0e^{i\omega t}$.这儿只考虑随时间的正弦变化.两种情况下，都有

$$\boldsymbol{p}(t)=\boldsymbol{p}_0e^{i\omega t}$$

也就是说，此时电荷密度分布就是

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{p}(t)\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{r})$$

这说明，此时电荷密度随时间的变化由电偶极子部分负担，而空间变化的部分则由δ函数的梯度承担.

再看连续性方程(continuity equation)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r},t)=0$$

将电荷密度代入，得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}(t)+\dot{\boldsymbol{p}}(t)\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{r})=0$$

其中一点表示对时间的求导.可见，一个随时间振荡的电偶极子对应于一个电流源

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=-\dot{\boldsymbol{p}}(t)\,\delta(\boldsymbol{r})$$

四维空间和电动力学

设 K'参照系相对于 K 参照系沿 x 轴以速度 v 相对运动，则四维坐标 $x_\mu=(\boldsymbol{x},ict)$ 的变换关系为 $x'_\mu=L_{\mu\nu}x_\nu$.其中，$L_{\mu\nu}$ 组成洛仑兹变换矩阵

$$L=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix},\quad \beta=\frac{v}{c},\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$\sum_{\mu=1}^{4}x_\mu^2$ 在洛仑兹变换下不变，因为洛仑兹变换矩阵是正交矩阵.不过，$\sum_{\mu=1}^{4}x_\mu^2$ 并不是“标准”的内积(inner product)，因为 $\sum_{\mu=1}^{4}x_\mu^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2-c^2t^2$ 并不正定，四维空间中两事件的“间隔”可以为负值——**赝内积空间(pseudo-inner product space)**.

洛仑兹变换 L 是正交变换，$L^{\mathrm{T}}L=I$；但不是幺正变换：$L^{+}L\neq I$.

四维矢量的例子.

四维时空中的矢量：$x_\mu=(\boldsymbol{x},\mathrm{i}ct)$

四维电流密度矢量：$J_\mu=(\boldsymbol{J},\mathrm{i}c\rho)$

四维电磁势矢量：$A_\mu=(\boldsymbol{A},\mathrm{i}\varphi/c)$

四维动量能量矢量：$P_\mu=(\boldsymbol{p},\mathrm{i}E/c)$

每一个分量都可以是复数.

将电磁场与电磁势之间的关系式

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\qquad(1)$$

统一地写成四维形式：

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}.$$

$F_{\mu\nu}$称为电磁张量(electromagnetic tensor):

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -\mathrm{i}E_1/c\\ -B_3 & 0 & B_1 & -\mathrm{i}E_2/c\\ B_2 & -B_1 & 0 & -\mathrm{i}E_3/c\\ \mathrm{i}E_1/c & \mathrm{i}E_2/c & \mathrm{i}E_3/c & 0\end{pmatrix}$$

从方程(1)出发，将电场和磁场分为横场部分和纵场部分的迭加：

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_l+\boldsymbol{E}_t,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_l+\boldsymbol{B}_t$$

此处的横场指与∇垂直，纵场则是与∇平行.横场部分和纵场部分是相互垂直的.相应地，矢势 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_l+\boldsymbol{A}_t$ 也分为横场部分和纵场两部分.所谓纵场部分，就是满足 $\nabla\times\boldsymbol{A}_l=0$ 的部分.

代入(1)式，得到

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_t=\nabla\times\boldsymbol{A}_t$$

$$\boldsymbol{E}_t=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}_t}{\partial t},\boldsymbol{E}_l=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}_l}{\partial t}$$

电场和磁场的横场部分只与 $\boldsymbol{A}$ 的横场部分有关.$\boldsymbol{E}$ 的纵场部分只与标量势 φ 和矢量势的纵场相关.故对它们作变换：

$$\boldsymbol{A}_l'=\boldsymbol{A}_l+\nabla\phi,\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

仍能满足上面的式子.这个变换就是规范变换.注意，矢势的横向部分是不参与这个变换的，如果参与了，就不是规范变换了.规范变换不改变电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$，所有电磁场的物理量都保持不变.这就是规范不变性.

电磁场中很多情形下取洛仑兹规范：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

写成四维形式：

$$\sum_\mu\partial_\mu A^\mu=0$$

即四维散度为零.

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0\\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\mu_0\boldsymbol{J}\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\mu_0 J_\mu$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0$$

方程中包含了四维势矢量的概念，$A_\mu=(\boldsymbol{A},\mathrm{i}\varphi/c)$ 即矢势与标势组成.将方程写为四维形式的好处是，可以证明各方程在洛仑兹变换下保持形式不变.

以后(第一章第 7 节)我们将看到，麦克斯韦方程组也可以利用变分法来推导出来.

请大家自己回去回顾复变函数中利用留数定理计算积分的内容.

问题：

1. 计算 $\sqrt{(-1)(-1)}=?$

一方面：$\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$

另一方面：$\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1$

为什么会出现这个矛盾，其中哪个是正确的？

2. $z=\sqrt{(x+\mathrm{i}0^+)^2-a^2}$，其中，$a$ 是个实数.判断：当 x 在整个实轴上变化时，z 在复平面的上半平面或者下半平面.