

这次期末考试，其中有一道题目将在以下三题中选择一题。

1. 求解积分方程

$$f(x) = \sin x + \cos x + \lambda \int_0^\pi \frac{\sin(x+x')}{\pi} f(x') dx'$$

参量 λ 是特征值和不是特征值的情况都要考虑到.齐次方程解的情况如何?

2. 求解积分方程.

$$f(x) = x + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\pi/2} dy \cos(x+y) f(y)$$

参量 λ 值是特征值和不是特征值的情况都要考虑到.齐次方程解的情况如何?

3. 求解积分方程

$$f(x) = x + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^\pi x' \sin(x+x') f(x') dx'$$

(I) 考虑用级数展开法求解.为此先要估计能够使级数收敛的 λ 值的上限.

(i) 用 $\max_{x,y \in [a,b]} |k(x,y)| = M$, $\lambda < 1/M(b-a)$ 的条件, 估计 λ 值的上限.

(ii) 用估计积分算子的范数的上限的办法, 估计 λ 值的上限.注意选取适当的核函数和积分元, 使你得到的 λ 值的上限尽可能地大.

(iii) 迭代求解至二级项.

(II) 求严格解. λ 值是特征值和不是特征值的情况都要考虑到.齐次方程解的情况如何?

以上三道题目属于第八章的有限秩核的积分方程。把有限秩核积分方程的解题步骤列于下。

有限秩核积分方程的形式如下。

$$f = g + \lambda \sum_{n=1}^N \phi_n (\psi_n, f) = g + \lambda \sum_{n=1}^N a_n \phi_n \quad (1)$$

其中已令

$$a_n \equiv (\psi_n, f) \quad (2)$$

在式(1)两边用 ψ_m 构成内积.令

$$\alpha_{mn} \equiv (\psi_m, \phi_n), \quad b_m \equiv (\psi_m, g) \quad (3)$$

就得到线性方程组

$$a_m - \lambda \sum_{n=1}^N \alpha_{mn} a_n = b_m \quad (4)$$

矩阵形式为

$$(I - \lambda M)a = b \quad (5)$$

其中，矩阵 M 的矩阵元就是式(3)定义的 $\alpha_{mn} \equiv (\psi_m, \phi_n)$ 。求出矩阵的 N 个特征值 $\lambda_i, i=1,2,\dots,N$ 。若 λ 不等于任一特征值，那么，从式(8.24)解出 $a = (I - \lambda M)^{-1}b$ ，代入式(1)，即求得解 f 。

若 $\lambda = \lambda_i$ 等于某一特征值，则与这个特征值相应的齐次方程的解记为 f_i 。它的表达式就是

$$f_i = \lambda_i \sum_{n=1}^N a_n \phi_n \quad (6)$$

计算式(1)的非齐次项 g 与的内积 (g, f_i) 。若 $(g, f_i) \neq 0$ ，则方程(1)在 $\lambda = \lambda_i$ 时无解；

若 $(g, f_i) = 0$ ，则还要计算方程 $\sum_{n=1}^N \phi_n(\psi_n, g)$ 是否为零。若 $\sum_{n=1}^N \phi_n(\psi_n, g) \neq 0$ ，原方程仍然无解。

当 $(g, f_i) = 0$ 且 $\sum_{n=1}^N \phi_n(\psi_n, g) = 0$ 时，原非齐次方程在 $\lambda = \lambda_i$ 时才有解。解是非齐次项加上函数的任意倍数：

$$f(\lambda = \lambda_i) = g + A f_i \quad (7)$$